

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Σεπτέμβριος 2016

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η διάρκεια των εξετάσεων είναι τρεις ώρες. Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα (2 μονάδες το καθένα). **Καλή Επιτυχία.**

Θέμα 1 : ~~α)~~ Αν $x, y, z \in R^n$ είναι ορθογώνια μεταξύ των με $\|x\|_2 = \|y\|_2 = \|z\|_2$, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $x + y$, $x - y + z$ και $x - y - 2z$ είναι ορθογώνια μεταξύ των.

~~β)~~ Αν $A \in R^{n,n}$ είναι τέτοιος ώστε ο πίνακας $I - A$ να είναι αντιστρέψιμος, να αποδείξετε τη σχέση

$$(I - A)^{-1} = I + A(I - A)^{-1}.$$

~~Θέμα 2 :~~ Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση και να συγκριθούν μεταξύ των, οι μέθοδοι Jacobi, Gauss-Seidel, η βέλτιστη SOR καθώς και η μέθοδος παρεμβολής (extrapolated) της Gauss-Seidel.

~~Θέμα 3 :~~ Να λυθεί το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

με τη μέθοδο συζυγών κλίσεων με αρχικό διάνυσμα $x^{(0)} = 0$. (Να διατηρείτε κλάσματα κατά τους υπολογισμούς.)

~~Θέμα 4 :~~ Να λυθεί το γραμμικό πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων $\min_x \|b - Ax\|_2$, με

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

και $b = (0 \ 3 \ 3 \ 4)^T$, με την QR ανάλυση χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Gram-Schmidt ορθογωνοποίησης. Στη συνέχεια, να βρεθεί η τιμή $\min_x \|b - Ax\|_2$. (Να γίνουν ακριβείς πράξεις με ριζικά και κλάσματα στους υπολογισμούς.)

~~Θέμα 5 :~~ Δίνεται ο συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Χρη-

σιμοποιώντας τον αλγόριθμο με τη $\|\cdot\|_\infty$ της μεθόδου των αντίστροφων δυνάμεων με αρχικό διάνυσμα $x^{(0)} = (1 \ 1 \ -1)^T$, να γίνουν δυο επαναλήψεις για την προσέγγιση της μικρότερης ιδιοτιμής και του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος. Η λύση των συστημάτων να γίνει με την παραγοντοποίηση Cholesky. (Να γίνουν ακριβείς πράξεις με κλάσματα στους υπολογισμούς.)